ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να εξεταστεί τι παριστάνει στο επίπεδο καθεμιά από τις εξισώσεις:

(i) $y^2-4y-8x-4=0$

(ii) $9x^2+4y^2-72x-24y+144=0$

(iii) $9x^2-16y^2-36x-96y-252=0$.

ΛΥΣΗ

(i) Έχουμε διαδοχικά:

$$y^2-4y-8x-4=0 \quad (1)$$

$$y^2-4y=8x+4$$

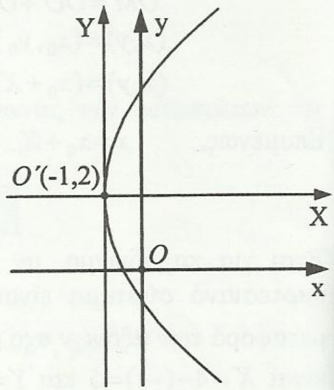
$$y^2-2\cdot2y+2^2=8x+4+2^2$$

$$(y-2)^2=8(x+1)$$

$$(y-2)^2=2\cdot4(x+1).$$

Αν θέσουμε $x+1=X$ και $y-2=Y$, δηλαδή αν κάνουμε παράλληλη μεταφορά των αξόνων και τοποθετήσουμε τη νέα αρχή στο σημείο $O'(-1,2)$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$Y^2=2\cdot4X.$$



Επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει παραβολή με κορυφή το σημείο $O'(-1,2)$ και άξονα την ευθεία $Y=0$, δηλαδή την ευθεία $y=2$.

(ii) Έχουμε διαδοχικά

$$9x^2+4y^2-72x-24y+144=0 \quad (1)$$

$$9(x^2-8x)+4(y^2-6y)=-144$$

$$9(x^2-2\cdot4\cdot x+4^2)+4(y^2-2\cdot3\cdot y+3^2)=9\cdot4^2+4\cdot3^2-144$$

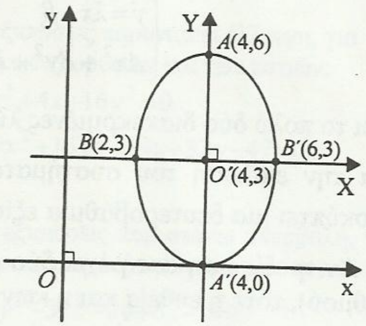
$$9(x-4)^2+4(y-3)^2=36$$

$$\frac{(x-4)^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1.$$

Αν θέσουμε $x-4=X$ και $y-3=Y$, δηλαδή αν κάνουμε παράλληλη μεταφορά των αξόνων και τοποθετήσουμε τη νέα αρχή στο σημείο $O'(4,3)$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{X^2}{2^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1$$

Επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη με κέντρο το σημείο $O'(4,3)$ και με $\alpha=3$, $\beta=2$ και $\gamma=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$. Τα άκρα του μεγάλου άξονα ως προς το νέο σύστημα είναι τα σημεία $(X,Y)=(0,3)$ και $(X,Y)=(0,-3)$, οπότε, λόγω των σχέσεων $x-4=X$ και $y-3=Y$, ως προς το αρχικό σύστημα, είναι τα σημεία $A(4,6)$ και $A'(4,0)$. Ανάλογα βρίσκουμε ότι τα άκρα του μικρού άξονα είναι τα σημεία $B(2,3)$ και $B'(6,3)$. Επίσης, οι εστίες είναι τα σημεία $E(4,3\sqrt{5})$, $E'(4,-3\sqrt{5})$.



(iii) Έχουμε διαδοχικά

$$9x^2-16y^2-36x-96y-252=0 \qquad (1)$$

$$9(x^2-4x)-16(y^2+6y)=252$$

$$9(x-2)^2-16(y+3)^2=144$$

$$\frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{(y+3)^2}{3^2}=1.$$

Αν θέσουμε $x-2=X$ και $y+3=Y$, δηλαδή αν κάνουμε παράλληλη μεταφορά των αξόνων και τοποθετήσουμε τη νέα αρχή στο σημείο $O'(2,-3)$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{X^2}{4^2}-\frac{Y^2}{3^2}=1.$$

Επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει υπερβολή με κέντρο το σημείο $O'(2,-3)$. Με ανάλογο τρόπο, όπως στην περίπτωση (ii), βρίσκουμε ότι η υπερβολή αυτή έχει

$$\alpha=4 \quad , \quad \beta=3 \quad , \quad \gamma=5$$

Άρα, η υπερβολή έχει κορυφές τα σημεία $A(6,-3)$ και $A'(-2,-3)$ και εστίες $E(7,-3)$ και $E'(-3,-3)$.